ماز

دوپینگ فوری شب امتحان

خلاصه فشرده برای مرور سریع

آمار و احتمال یازدهم ریاضی

فصل اول

هر آنچه که باید در مورد ترکیب‌ها بدانید!

۱) جمله‌ای خبری که معنایی متضاد و مخالف با خود گزاره دارد را نقیض گزاره می‌نامند.

* نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و به علامت « ~ » ناقض می‌گویند.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۲) اگر p و q دو گزاره باشند ، ترکیب فصلی آن‌ها را به‌صورت $p \vee q$ نشان می‌دهند و «p یا q» خوانده می‌شود.

* ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزارهٔ مرکب، درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۳) اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی آن‌ها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و «p و q» خوانده می‌شود.

* ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزارهٔ مرکب، نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۴) اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی آن‌ها را با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند و «اگر p آن‌گاه q» خوانده می‌شود.

* در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، گزارهٔ p را مقدم و q را تالی می‌نامند.
* ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب شرطی دو گزاره ، فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، در غیر این صورت ارزش ترکیب شرطی درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

* اگر مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است و به ارزش تالی بستگی ندارد. (این قانون را انتفای مقدم می‌نامند.)

$$\boxed{F \Rightarrow q \equiv T}$$

* اگر $p \Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد، گزارهٔ $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی می‌نامند.
* اگر $p \Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد، آن‌گاه گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی می‌نامند.
* عکس نقیض هر ترکیب شرطی با خود ترکیب شرطی هم‌ارز است، یعنی همواره داریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۵) به ترکیب عطفی هر گزارهٔ شرطی و عکس آن یعنی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، ترکیب دوشرطی گفته می‌شود و به‌صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان داده می‌شود و به‌صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

۱. اگر p آن‌گاه q و برعکس. **۲.** p اگر و تنها اگر q. **۳.** p شرط لازم و کافی برای q است.

* ارزش ترکیب دوشرطی زمانی درست است که دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، در غیر این صورت ارزش آن نادرست است.

* اگر $p \Leftrightarrow q$ یک گزارهٔ دوشرطی باشد، آن‌گاه گزارهٔ $q \Leftrightarrow p$ را عکس آن می‌نامند که هم‌ارز با خود گزاره است.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۶) اتحادهای مهم

$$\bigcirc \Rightarrow \square \equiv \sim \bigcirc \vee \square$$

گزاره‌های همواره درست یا همواره نادرست

$p \Leftrightarrow p \equiv T$	$p \Rightarrow T \equiv T$	$p \vee T \equiv T$	$p \vee \sim p \equiv T$
$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$	$F \Rightarrow p \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	$p \wedge \sim p \equiv F$

نقیض ترکیب فصلی و عطفی و شرطی و دوشرطی

قانون دمورگان $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	قانون دمورگان $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی

جذب $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$	شرکت‌پذیری $\begin{matrix} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{matrix}$	خودتوانی $\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases}$
هم‌پوشانی $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$	توزیع‌پذیری $\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$	جابه‌جایی $\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$

یه نمونه باحال

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$[(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)] \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

پاسخ: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	ن	د	ن

پس با توجه به ستون‌های ششم و هشتم از سمت چپ هم‌ارزی برقرار است.

نکاتی طلایی

برای بیان مفاهیمی چون «به ازای هر یا به ازای جمیع مقادیر یا به ازای تمام مقادیر و ...» از نماد $\forall$ استفاده شده و آن را سور عمومی می‌نامند.

همچنین برای بیان مفاهیمی چون «وجود دارد یا لااقل یکی هست یا به ازای بعضی مقادیر و ...» از نماد $\exists$ استفاده شده و آن را سور وجودی می‌نامند.

خواندن گزاره‌های سوری	
$\exists x; p(x)$	$\forall x; p(x)$
بعضی ها خاصیت p را دارند.	هر x خاصیت p را دارد.

جبر مجموعه‌ها

زیرمجموعه‌های محض:

اگر از زیرمجموعه‌های یک مجموعه، خود آن مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های محض یا سرهٔ آن مجموعه می‌گوییم؛ بنابراین اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$، آنگاه A را زیرمجموعهٔ محض (سره) مجموعهٔ B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subset B$. درنتیجه تعداد زیرمجموعه‌های سره برابر است با:

$$۲^n - ۱$$

یه نمونه باحال

تعداد زیرمجموعه‌های سره (محض) مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ برابر .... است.

پاسخ:

$$A = \{۱,۲,۳,۴\} \xrightarrow{n=۴} \text{تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ مجموعه } A = ۲^n - ۱ = ۲^۴ - ۱ = ۱۵$$

قوانین مجموعه‌ها

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه و A' و B' متمم‌های آن‌ها باشند، آن‌گاه:

دمورگان	تبدیل تفاضل به اشتراک	جذب
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$A - B = A \cap B'$	$A \cup (A \cap B) = A$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$A - B = B' - A'$	$A \cap (A \cup B) = A$

اگر A, B, C سه مجموعهٔ دلخواه باشند، آن‌گاه:

شرکت‌پذیری	توزیع‌پذیری
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

یه نمونه باحال

اگر $A - B = \varnothing$ باشد، آنگاه $B' \cap (A \cup B) =$ .... است.

پاسخ:

اگر $A - B = \varnothing$ باشد، آنگاه $A \subseteq B$ است و بالعکس.

$$A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$\xrightarrow[A \cup B = B]{A \subseteq B} B' \cap (A \cup B) = B' \cap B = \varnothing$$

یه نمونه باحال

با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید. (توجه: از نمودار ون استفاده نکنید.)

$$(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$$

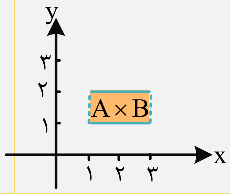
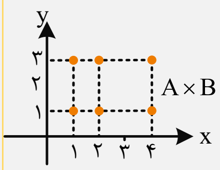
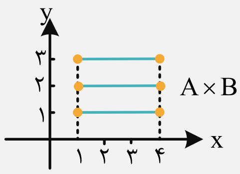
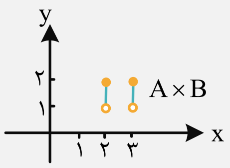
پاسخ: ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می‌کنیم:

$$(B\cap A)-B'=(B\cap A)\cap B=B\cap A$$

$$(A'\cap B)\cup(\underbrace{[\overbrace{(B\cap A)-B'}^{B\cap A}]\cap(B\cup A)}_{B\cap A})=(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap(A'\cup A)=B\cap U=B$$

ضرب دکارتی

برای رسم نمودار ضرب دکارتی $A\times B$ باید اعضای A را روی محور xها و اعضای B را روی محور yها در نظر بگیریم. حال به چند حالت مهم برمی‌خوریم:

A و B هر دو بازه‌ای	A و B هر دو چند عضوی	A بازه‌ای و B چند عضوی	A چند عضوی و B بازه‌ای
$A\times B$ سطح یک مربع یا مستطیل	$A\times B$ چندین نقطه	$A\times B$ چند پاره‌خط موازی محور xها	$A\times B$ چند پاره‌خط موازی محور yها
$A=(۱,۳)\ ,B=[۱,۲]$	$A=\{۱,۲,۴\}\ ,\ B=\{۱,۳\}$	$A=[۱,۴]\ ,\ B=\{۱,۲,۳\}$	$A=\{۲,۳\}\ ,B=(۱,۲]$
			

یه نمونه باحال

اگر $A=\{x-y,۱۵\}$، $B=\{x^۲-y^۲,۳\}$ و $A\times B=B\times A$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{x}{y}$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

پاسخ:

نکتهٔ سؤال:

$$\begin{cases}A=\{x-y,۱۵\}\\ B=\{x^۲-y^۲,۳\}\end{cases}\xrightarrow[A,B\neq\varnothing]{A\times B=B\times A}A=B$$

$$\begin{cases}x-y=۳\\ x^۲-y^۲=۱۵\Rightarrow(x+y)\underbrace{(x-y)}_{=۳}=۱۵\Rightarrow(x+y)=۵\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=۵\\ x-y=۳\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=۴\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=۴$$

مشاوره نهایی: اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند، به‌طوری که $A\times B$ و $B\times A$ برابر باشند، آنگاه قطعاً $A=B$ است.

فصل دوم

فضای نمونه: مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در هر مشاهده یا آزمایش تصادفی را **فضای نمونهٔ** آن آزمایش تصادفی می‌نامند و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهند.

هر عضو فضای نمونه را یک **برآمد** می‌گویند.

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک **پیشامد تصادفی** می‌گویند.

احتمال پیشامد A: احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونهٔ S به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ خواهد بود.

یه نمونه باحال

اگر دو تاس را پرتاب کنیم و مجموع دو تاس حداقل ۱۰ باشد، احتمال اینکه اعداد روشدهٔ دو تاس با هم برابر باشند، .... است.

پاسخ:

مشاورهٔ مصحح: فضای نمونه‌ای محدودشده برابر است با:

$$S=\{(۵,۵),(۴,۶),(۶,۴),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$n(S)=۶$$

$$A=\{(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر مساوی n، که بر k بخش‌پذیرند، $\left[\frac{n}{k}\right]$ است.

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، همواره خواهیم داشت:

۱. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۲. $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

۳. $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

یه نمونه باحال

عددی به‌تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، را محاسبه کنید.

پاسخ:

پیشامد عضوهایی از S که بر ۳ بخش‌پذیرند: A

پیشامد عضوهایی از S که بر ۴ بخش‌پذیرند: B

$$S=\{۱,۲,۳,۴,\cdots,۲۰۰\}\Rightarrow n(S)=۲۰۰\quad n(A)=\left[\frac{۲۰۰}{۳}\right]=۶۶\quad,\quad n(A\cap B)=\left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]=۱۶$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۶۶}{۲۰۰}-\frac{۱۶}{۲۰۰}=\frac{۵۰}{۲۰۰}=\frac{۱}{۴}$$

نکات احتمال غیرهم‌شانس

اگر در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، $S=\{S_۱,S_۲,...S_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

۱) $۰\le P(A)\le ۱$

۲) $P(S)=۱$

۳) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$

روش حل سؤالات احتمال غیرهم‌شانس:

۱. داده‌های مسئله را به‌شکل معادلات ریاضی در کنار هم می‌نویسیم.

۲. احتمال یکی از پیشامدهای ساده را x فرض می‌کنیم و احتمال بقیهٔ پیشامدهای ساده را برحسب x به دست می‌آوریم.

۳. مجموع تمام این احتمال‌ها برابر با ۱ است. با حل این تساوی مقدار x و سپس احتمال تمام پیشامدهای ساده را به‌دست می‌آوریم.

یه نمونه باحال

در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، احتمال آمدن رو، k برابر پشت است. اگر احتمال اینکه در دوبار پرتاب، سکه بار اول رو و بار دوم پشت بیاید $\frac{۳}{۱۶}$ باشد، k کدام است؟

پاسخ:

$$\Rightarrow P(\text{پ}) + P(\text{ر}) = ۱ \ , \quad S = \{\text{ر،پ}\}$$

$$P(\text{پ}) + kP(\text{پ}) = ۱$$

$$(k+۱)P(\text{پ}) = ۱ \Rightarrow P(\text{پ}) = \frac{۱}{k+۱}$$

$$\Rightarrow P(\text{ر}) = \frac{k}{k+۱}$$

$$P(\text{ر}) \times P(\text{پ}) = \frac{k}{k+۱} \times \frac{۱}{k+۱} = \frac{k}{(k+۱)^۲} = \frac{۳}{۱۶} = \frac{۳}{۴^۲} \Rightarrow k = ۳$$